Leçon 205 - Espaces complets. Exemples et applications.

Ici, les ev considérés seront des $\mathbb{K}$-ev, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Généralités sur les espaces complets. —

1. *Suites de Cauchy.* —

- Def : Une suite $(u_n)_n$ d'un espace métrique (X, d) est de Cauchy ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tq $\forall p, q \geq n_0$, $d(u_p, u_q) \leq \varepsilon$.
- Pro : Les suites convergentes sont de Cauchy.
- Contre-ex : Dans $(\mathbb{Q}, |.|)$, la suite $u_n = \sum_k \frac{1}{k!}$ est de Cauchy mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.
- Pro : Une suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence est convergente.

2. *Espaces complets.* —

- Def : Un espace métrique (X, d) est complet ssi toute suite de Cauchy converge.
- Def : Un espace de Banach est un espace vectoriel E muni d'une norme $\|.\|$ qui est complet pour la distance induite par $\|.\|$.
- Ex : $\mathbb{R}$ est complet. $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.
- Ex : L'ensemble des fonctions bornées d'un espace E vers un Banach F est complet pour la norme uniforme.
- Pro : Tout fermé de (X, d) complet est complet pour d.
- Thm : Pour (X, d) espace métrique, il existe (Y, d') espace métrique complet et $i : X \to Y$ une isométrie. En considérant $\overline{i(X)}$ dans Y qui est complet pour d' qui prolonge d, on ainsi l'existence d'un complété de (X, d).
- Thm : Un espace complet vérifie la propriété des segments emboîtés : "Toute suite décroissante de fermés bornés pour l'inclusion a une intersection non-vide".
- App : Pour $C \subset E$ une partie fermée bornée d'un espace de Banach et $f : C \to \mathbb{R}$ continue, alors f est bornée.
  Si C est non-bornée et si f est continue coercive ($f(x) \to_{\|x\| \to +\infty} +\infty$), alors f admet un minimum sur C.
- Rem : La complétude n'est pas une notion de topologie : Sur $\mathbb{R}$, $|.|$ et d_{arctan} définissent la même topologie bien que $\mathbb{R}$ ne soit pas complet pour d_{arctan} car les $[n, +\infty[$ sont des fermés bornés mais ne vérifient pas la propriété des segments emboîtés.
- Pro : Le produit fini d'ensembles complets est complet.
- Ainsi, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ sont complets.
- Pro : Un espace vectoriel normé est complet ssi toute série absolument convergente est convergente.

3. *Exemples d'espaces complets.* —

- Ex : Si X espace métrique et F est un Banach, $(C_b^0(X, F), \|.\|_\infty)$ est un Banach.
  Si de plus X est compact, alors $(C^0(X, F), \|.\|_\infty)$ est lui-aussi un Banach.
- Ex : Pour E,F des evn et F un Banach, $(L_c(E, F), \|.\|_\infty)$ est un Banach.
  Ainsi, le dual topologique d'un Banach E, $E' = L_c(E, \mathbb{K})$, est un espace de Banach.
- Def : Pour Ω un ouvert borné de $\mathbb{K}^n$ et K_n une suite croissante de compacts dont la réunion donne Ω tout entier, on définit pour $f, g \in C^0(\Omega, \mathbb{K})$ $d(f, g) := \sum_n sup_{K_n}(2^{-n}, |f(x) - g(x)|)$. C'est une distance qui caractérise la convergence uniforme sur tout compact.
- Pro : Muni de cette distance, $C^0(\Omega, \mathbb{K})$ est complet. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, $Hol(\Omega)$ est complet lui aussi.
- Rem : Toutefois, cette distance ne provient pas d'une norme, donc ces espaces vectoriels ne sont pas dans ces conditions des espaces de Banach.
- Def : Soit $(X, \mathbb{A}, \mu)$ un espace mesuré. On note N l'ensemble des fonctions nulles presque partout et $\forall 1 \leq p < +\infty$, on définit $\mathscr{L}^p(X)$ l'ensemble des fonctions f telles que $\int_X |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty$, ainsi que $\|f\|_p := (\int_X |f|^p)^{\frac{1}{p}}$.
  Pour $p = +\infty$ on définit $\mathscr{L}^\infty(X)$ l'ensemble des fonctions bornées presque partout, ainsi que $\|f\|_\infty := inf\{M > 0 \text{ tq } |f| \leq_{pp} M\}$.
  On définit alors pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ le quotient d'ev $L^p(X) := \mathscr{L}^p(X)/N$.
- Pro : $\forall 1 \leq p \leq +\infty$ $(L^p(X), \|.\|_p)$ est un evn.
- Théorème de Riesz-Fischer : $\forall 1 \leq p \leq +\infty$ $(L^p(X), \|.\|_p)$ est un espace de Banach.
- Ex : Pour $X = \mathbb{N}$ et μ la mesure de comptage, $L^p(\mathbb{N})$ est l'ensemble des suites $(u_n)_n$ telles que $\sum_n |u_n|^p \leq +\infty$.

2. Théorèmes fondamentaux sur les espaces complets. —

1. *Théorèmes de prolongement.* —

- Thm : Soit (X, d) complet, (Y, d') complet, A dense dans X et $f : A \to Y$ uniformément continue. Alors il existe $g : X \to Y$ uniformément continue qui prolonge f.
- Cor : Pour E,F des espaces de Banach, A dense dans E et $f : A \to F$ lin cont, il existe $g : E \to F$ lin cont prolongeant f.
- App : Pour $[a, b]$ un segment et f une fonction étagée sur $[a, b]$, on peut définir l'intégrale de Riemann de f comme $lim(\sum_k f(\frac{k}{n}))$. Or, cette application est uniformément continue pour la norme uniforme, ce qui permet de l'étendre à l'ensemble des fonctions réglées qui est l'espace des fonctions qui sont limite uniforme de fonctions étagées.
  En particulier, $C^0([a, b])$ est un ensemble de fonctions étagées. On a alors défini l'intégrale de Riemann pour les fonctions réglées, dont les fonctions continues sur un segment.
- Def : Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit $\widehat{f}(x) := \int_\mathbb{R} e^{-ixy} f(y)dy$ la transformée de Fourier de f.
- Pro : $\widehat{f}$ est bien définie, et $\widehat{f} \in C_0^0(\mathbb{R})$.
- Théorème de Fourier-Plancherel : En notant $P(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f}$, on trouve alors que $\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $\|P(f)\|_2 = \|f\|_2$.
  Ainsi, P est une isométrie linéaire de $L^1 \cap L^2 \to L^2$, et se prolonge en une isométrie

linéaire à $L^2(\mathbb{R})$ tout entier.
On peut ainsi prolonger la transformée de Fourier à $Ł^2(\mathbb{R})$.

2. *Théorèmes de point fixe.* —

- Théorème du point fixe de Picard-Banach : Pour (X,d) complet, F un fermé de X et $f : F \to F$ qui est k-Lipschitzienne avec $k < 1$, f admet un unique point fixe s dans F et toute suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers s.
  On a même : $|u_{n+1} - s| \leq k|u_n - s| \leq k^{n+1}|u_0 - s|$. (vitesse de convergence linéaire)
- Cor : Le théorème est aussi vrai ssi il existe un n tq $f \circ \cdots \circ f$ est k-Lipschitzienne.
- App : Théorème de Cauchy-Lipschitz : Soit $F : I \times U \to \mathbb{R}^n$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et un ouvert de U $\mathbb{R}^n$, localement Lipschitz en sa seconde variable, et soit $(t_0, x_0) \in I \times U$.
  Alors il existe (Y,J) où J est un intervalle inclus dans I et $Y \in C^1(J,U)$ avec $\forall t \in J$, $Y'(t) = F(t, Y(t))$ et $Y(t_0) = x_0$. (solution du problème de Cauchy de l'ED associée à F) De plus, pour (f, J_1) et (g, J_2) solutions du problèmes de Cauchy, $f \equiv g$ sur $J_1 \cap J_2$.
- App : Pour $\varphi(x) = x - cf(x)$, $c \neq 0$, on a $\varphi(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$. On peut alors faire varier c et l'intervalle I pour essayer de rendre φ k-Lipschitzienne afin de pouvoir approximer son point fixe, et ainsi approximer un zéro de f.
- App : Théorème d'inversion locale : Soient E,F des espaces de Banach de dim finie, U un ouvert de E, et $f : U \to F$ de classe C^k. Si il existe $x \in U$ tel que $D_x(f)$ soit inversible, alors il existe un voisinage de x sur lequel f est une bijection, dont l'inverse est de classe C^k.
- App : Théorème des fonctions implicites : Soient E,F,G des Banach de dim finie, U,V des ouverts de E,F et $f : U \times V \to G$ de classe C^k. S'il existe $(u_0, v_0) \in U \times V$ tels que $\partial_v D_{(u_0,v_0)}(f)$ soit inversible, alors il existe des voisinages U_1, V_1 de u,v et une fonction $g : U_1 \to V_1$ de classe C^k telle que $\forall (u,v) \in U_1 \times V_1$, $f(u,v) = f(u_0, v_0)$ $\Leftrightarrow v = g(u)$.

3. *Théorème de Baire.* —

- Théorème de Baire : Dans un espace complet, une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. Une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.
- **Dev** : Densité des fonctions continues sur $[0,1]$ et dérivables nulle part.
- App : Un evn possédant une famille libre dénombrable telle que tout élément soit une combi lin des éléments de la famille n'est pas complet.
- Théorème de Banach-Steinhaus : Pour une suite $A \subset L_c(E,F)$ avec E un Banach. Soit $sup_A(\|f\|) \leq +\infty$, soit il existe une partie dense U de E sur laquelle $\forall x \in U$, $sup_A(\|f(x)\|) = +\infty$.
- App : Il existe des fonctions continues 2π-périodiques qui ne sont pas égales à leur série de Fourier.
- Théorème de l'application ouverte : Soient E,F des Banach et $f \in L_c(E,F)$ surjective. Alors f est ouverte : l'image de tout ouvert de E est un ouvert de F.
- Théorème du graphe fermé : Soient E,F des Banach et $f \in L(E,F)$.
  Si le graphe de f est fermé dans $E \times F$, alors f est continue.

3. Espaces de Hilbert. —

1. *Généralités et exemples.* —

- Def : Produit scalaire : forme sesqui-linéaire sur H hermitienne, définie positive.
- Def : Espace préhilbertien : espace vectoriel muni d'un produit scalaire
- Def : E est un espace de Hilbert ssi il est préhilbertien et complet pour la norme engendrée par son produit scalaire.
- Pro : Le produit scalaire induit une norme sur l'espace vectoriel. $N(x) = \sqrt{< x, x >}$.
- Pro : Identité du parallélogramme : $N^2(x+y) + N^2(x-y) = 2(N^2(x) + N^2(y))$
- Thm : Inégalité de Cauchy-Schwarz : $| < x, y > | \leq N(x)N(y)$ avec égalité ssi $(x,y) est \mathbb{R} - liée$.
- Ex : $\mathbb{R}^n$ avec $< X, Y > := X^t.A.Y$, $L^2(X)$, $l^2(\mathbb{N})$ sont des espaces de Hilbert.
- Contre-Ex : $(C([0,1], \mathbb{K}), < ., . >_{L^2})$ n'est pas un espace de Hilbert car il n'est pas complet.
- Def : Orthogonalité $x \perp y \Leftrightarrow < x, y > = 0$.
- Def : Pour $A \subset E$, $A^\perp$. C'est un sous-ev de E.
- Pro : $A^\perp = (Vect(A))^\perp = (\overline{Vect(A)})^\perp$, et est toujours fermé.
- Théorème de projection sur un convexe fermé : Soit C un convexe fermé. Alors pour tout $x \in E$ il existe un unique $p(x) \in C$ tel que pour tout $y \in C$ on ait : $< x - y, p(x) - y > \leq 0$.
- Pro : Si C est un s-ev fermé, alors p est linéaire, donc linéaire continue.
- Cor : Pour F un s-ev de E, $E = \overline{F} \oplus F^\perp$.
- Pro : Un espace F est dense dans E ssi $F^\perp = \{0\}$.
- Théorème de représentation de Riesz : Pour tout F forme linéaire continue sur E, il existe $y \in E$ tel que $\forall x \in E$, $F(x) = < x, y >$.
- Def+Pro : Une famille orthogonale est une famille d'éléments $(f_n)_n$ qui sont orthogonaux 2à2.
  En particulier, une telle famille est libre.
- **Dev** : Théorème de Grothendieck : Soit $(X, \mathbb{A}, \mu)$ un espace probabilisé et F un sous-espace vectoriel de $L^\infty(X)$ fermé pour $\|.\|_p$ pour un $1 \leq p < +\infty$.
  Alors F est de dimension finie.

2. *Bases hilbertiennes.* —

- Def : Base hilbertienne.
- Ex : $(e_n)_n$ est une base hilbertienne sur $l^2(\mathbb{N})$, la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- Thm : Un espace de Hilbert est séparable ssi il possède une base hilbertienne dénombrable.
- Cor : Tous les espaces de Hilbert séparables sont isométriquement isomorphes à $l^2(\mathbb{N})$.

- App : Pour E Hilbert séparable, décomposition d'un élément dans une base hilbertienne (la suite des coeffs étant dans $l^2(\mathbb{N})$, donc convergence l^2.)
- Ex : Pour $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et $L^2(\mathbb{T})$ avec $< f, g >:= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$, la famille $e_n(t) := e^{int}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ est une base hilbertienne de cet espace.
- Pro : Pour toute $f \in L^2(\mathbb{T})$, $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |< f, e_n >|^2$.
- Appli : Pour f 2π-périodique, paire, telle que $f(x) = \chi_{[0,\pi/2[} - \chi_{]\pi/2,\pi]}$ sur$[0, \pi]$, la formule de Parseval donne : $\sum_k \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. On en déduit $\sum_k \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

3. *Espaces de Hilbert à noyau de reproduction.* —

- Def : Soit X un ensemble et H un espace de Hilbert de fonctions de $X \to \mathbb{C}$. H est un espace de Hilbert à noyau de reproduction ssi il existe $K : \mathbb{D}\times\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tel que $k_z(.) := \overline{K(z, .)} \in B^2(\mathbb{D})$ $\forall z \in \mathbb{D}$ et tel que $f(z) =< f, k_z > \forall f \in B^2(\mathbb{D})$, $z \in \mathbb{D}$.
- Pro : Un espace de Hilbert de fonctions a un noyau de reproduction ssi les opérateurs d'évaluation $\delta_z : f \mapsto f(z)$ sont continus $\forall z \in X$.
- Théorème : Le noyau de reproduction caractérise l'espace de Hilbert : Si on se donne un noyau de reproduction K, alors il existe un unique $(H, \|.\|)$ hilbert de fonctions $X \to \mathbb{C}$ dont K est le noyau de reproduction.
- **Dev** : L'espace de Bergman $B^2(\mathbb{D}) := \{f \in Hol(\mathbb{D})\ \text{tq} f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{D})\}$ est un espace de Hilbert pour $\|.\|_2$, dont une base hilbertienne est la famille des $e_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}z^n$.
  $f \in Hol(\mathbb{D})$ est dans $B^2(\mathbb{D})$ ssi pour $f(z) = \sum_n a_n z^n$ on a $(\frac{a_n}{\sqrt{n+1}})_n \in l^2$. On a une condition d'intégrabilité qui ne porte que sur les coeffs du DSE en 0.
  L'espace de Bergman est un espace de Hilbert à noyau de reproduction. Son noyau de reproduction est $K_B(z, w) = \frac{\pi}{(1-z\overline{w})^2}$.
- Rem : Ainsi, on obtient beaucoup de propriétés sur $B^2(\Omega)$ grâce à l'étude de son noyau de reproduction, qui a une forme simple ici.
- Rem : On peut aussi définir $B^p(\mathbb{D})$ pour $1 \leq p < +\infty$ et ramener certaines études sur les B^p à une étude sur B^2 afin de profiter de son caractère hilbertien.
- Def : On définit $H^2(\mathbb{D}) = \{\sum_n a_n z^n \text{ tq } (a_n)_n \in l^2(\mathbb{N})\}$ l'espace de Hardy du disque.

- Pro : L'espace de Hardy du disque est un espace de Hilbert pour $< f, g >= \sum_n a_n.\overline{b_n}$.
  Une base hilbertienne de $H^2(\mathbb{D})$ est $z \mapsto z^n$, et il est lui aussi un espace de Hilbert à noyau de reproduction pour $K_H(z, w) = \frac{1}{1-z\overline{w}}$.

- Pro : On peut injecter $B^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{D})$ dans $L^2(\mathbb{D})$. Pour P_B et P_H les projecteurs orthogonaux de $L^2(\mathbb{D})$ sur $B^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{D})$, on a : $P_B(f)(z) =< f, \overline{K_B(z, .)} >$ et $P_H(f)(z) =< f, \overline{K_H(z, .)} >$, $\forall f \in L^2(\mathbb{D})$, $\forall z \in \mathbb{D}$.
- Thm : Dans un espace de Hilbert de fonctions à noyau de reproduction, si un opérateur de composition $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$ est bien défini, alors il est continu.
- Thm : Pour tout $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorphe, $\forall f \in B^2(\mathbb{D})$, $f \circ g \in B^2(\mathbb{D})$. Idem pour $H^2(\mathbb{D})$.

Références

Albert : Suites de Cauchy, Prop des espaces complets. Espaces de fonctions, appli lin cont. Prolongement des applis lin cont
Rouvière : Théorème de Picard-Banach, Cauchy-Lipschitz, inversion locale, fonctions implicites.
Hauchecorne : Contre-Exemple d'espaces non complets, d'evn non Banach, d'appli lin non cont.
Zavidovique : Théorème de Grothendieck. (Dev)
Hirsh-Lacombe : Espaces de Hilbert, Th de Riesz.
Gourdon : Critère de complétude d'un evn. Inversibilité de (Id-u). Th de Baire, Th de Banach-Steinhaus.
Brézis : Théorème de Riesz-Fischer. Théorème de Lax-Milgram, Stampacchia.
Zuily, Queffélec : Fermés emboîtés. Densité des cont partout dérivables nulle part (Dev).
Bayen, Margaria : Espace de Bergman (Dev).

June 10, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes